ピクトの独り言

フーリエ変換の話し_その3

株式会社 アイネット

inet

ラジアン１

- 円運動の計算で、三角関数って非常に便利なんですね。
- でもサインとコサインの計算は、度数では行いません。

- 度数に代わる「ラジアン」で計算を行います。
- それは、ラジアンの方が簡単だからです。

- 私ピクトは、画像補正ソフトです。
- 多くの領域で、角度計算を使用します。ですが・・・。
- フーリエ変換では、角度計算は無用の長物と言えそうです。

- ではなぜ角度による計算を行ったのでしょうか？
- ・・・それは話しの成り行きです（笑）。

ラジアン２

- ｘが、ｘ軸上を東から西に移動した大きさは、２です。
- 東から西への移動距離は直径の長さとなります。

- ｘ軸上の円周東から西までの円周上の距離はどうでしょう。
- これは、２より大きいことは一目瞭然です。
- では、いくらか。

- 円周の長さは、「円周率＝π（パイ）」で表現されます。
- パイは、半径＝1.0のときの半周で、3.14倍となります。
- 直径は半径の２倍ですので、直径と比較しても結構です。

- 「★★直径または半径と半円周の比率★★」なんですね。

ラジアン３

- 直径の往復距離は、直径の２倍ですね。
- 半径１の円ですから、半径×２×２倍＝4.0ですね。
- 当たり前か(笑)。

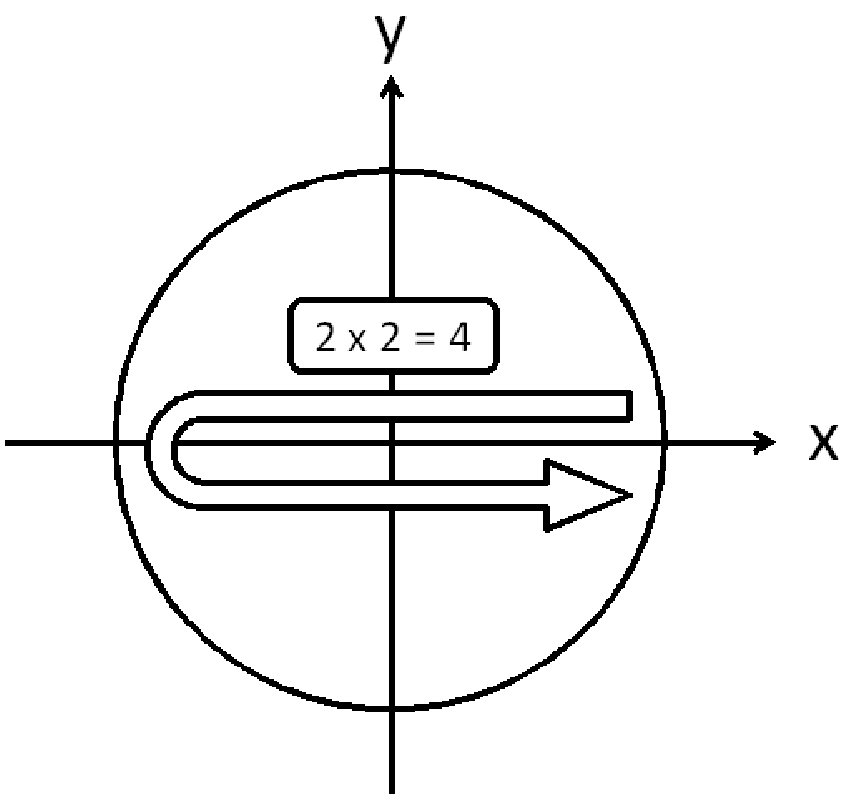
- パイは、円の半周ですから、１周はその２倍＝２πです。

- 円の直線距離なら４で行ける所を、なんとなんと・・・。
- ２π（ニーパイ＝6.28 ）も掛かってしまうのですね。

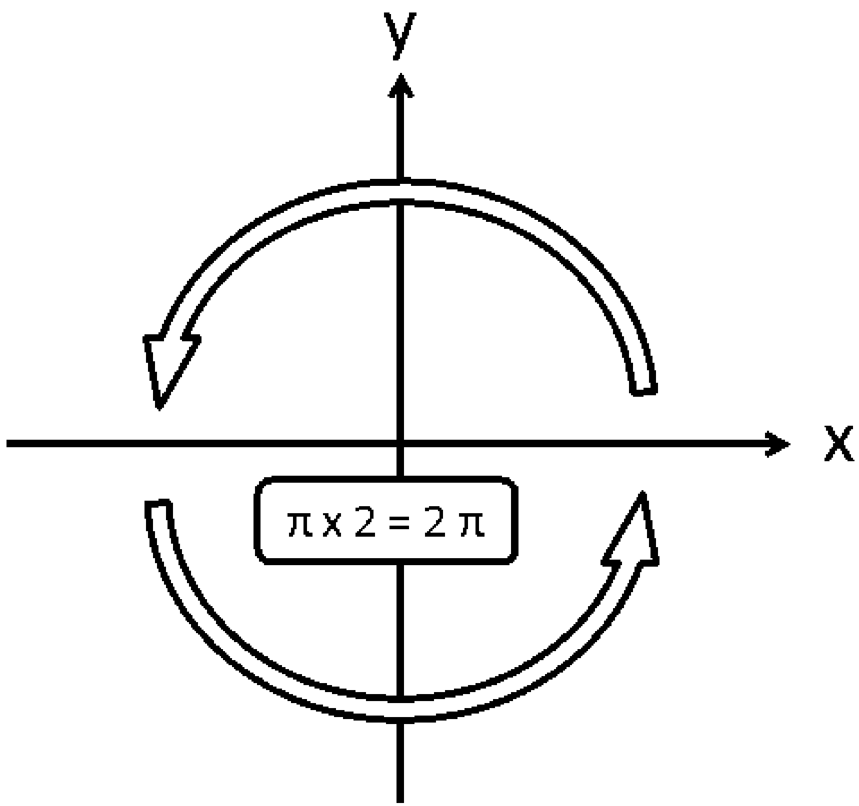
- 文字通り、「大回り」となってしまいます(笑)。

画像12

直径の往復距離



円周１回転の距離



中央型回転表

- 回転図表は、次のようなものでした。

- 表の数値は、回転位置あるいは移動位置を表していました。
- 回転位置の全数量はピクセル数でした。

- 回転位置は、ピクセル数に依存して大きくなります。
- 全体の中のどの辺りに位置するのでしょうか。
- 現在位置を現したいですね。

- ８ピクセルの中の１ピクセル目は、1/8＝0.125 です。
- この 1/8 とか 0.125 を「回転率」と言います。

画像13

中央型回転表を表示

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	4	1	6	3	0	5	2	7
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	4	3	2	1	0	7	6	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	5	6	7	0	1	2	3
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	4	7	2	5	0	3	6	1

回転率表の作成

- 回転表を分数式による回転率で表示してみましょう。

- いかがですか、分数式は簡単でしょう。

- 分数式は、分母を除けば、元の表と同じになります。
- たったこれだけで・・・。
- 分かりやすいですよねぇ。
- 数学って、簡単ですね。

- え、「これは数学でなく算数」。
- 仰られる通りです(笑)。

画像14

回転率を分数式で表示

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	0/8	4/8	0/8	4/8	0/8	4/8	0/8	4/8
5	4/8	1/8	6/8	3/8	0/8	5/8	2/8	7/8
6	0/8	6/8	4/8	2/8	0/8	6/8	4/8	2/8
7	4/8	3/8	2/8	1/8	0/8	7/8	6/8	5/8
0	0/8	0/8	0/8	0/8	0/8	0/8	0/8	0/8
1	4/8	5/8	6/8	7/8	0/8	1/8	2/8	3/8
2	0/8	2/8	4/8	6/8	0/8	2/8	4/8	6/8
3	4/8	7/8	2/8	5/8	0/8	3/8	6/8	1/8

最初の到達位置

- 円周の長さは、「円周率＝π（パイ）」で表現されました。
- パイは、半径を１としたときの半円周の割合でした。
- π＝3.14でした。
- 半円の割合ですから、１周はその２倍、２πになりました。
- よって、円１周のラジアンは、２πとなりましたね。

- 最初の到達位置（1/8）の円周距離を求めてみましょう。
- 度数で言えば、45度となります。
- 円全体が２πですので、それの８分の１ですね。
- ２π×（1/8）＝ 0.785 となります。
- これが、最初の到達位置のラジアンとなります。

ラジアン表示１

- それでは実際に、回転率をラジアンで表示してみましょう。

- ラジアンで表示すると、結構、キツイです。
- 文字で一杯いっぱいです（笑）。

- でも、ラジアンの計算は簡単でしょう。
- 「回転数÷全体数」に「２π」を掛けただけですからね。

- ラジアンは、回転位置における円周の長さを示しています。
- より正確に言えば、「直径に対する円周の比率」でしたね。

- ラジアンって、ほんとに便利でしょう。

画像15

回転率をラジアン計算式で表示

No　数	4	5	6	7	0	1	2	3
4	2π*0/8	2π*4/8	2π*0/8	2π*4/8	2π*0/8	2π*4/8	2π*0/8	2π*4/8
5	2π*4/8	2π*1/8	2π*6/8	2π*3/8	2π*0/8	2π*5/8	2π*2/8	2π*7/8
6	2π*0/8	2π*6/8	2π*4/8	2π*2/8	2π*0/8	2π*6/8	2π*4/8	2π*2/8
7	2π*4/8	2π*3/8	2π*2/8	2π*1/8	2π*0/8	2π*7/8	2π*6/8	2π*5/8
0	2π*0/8	2π*0/8	2π*0/8	2π*0/8	2π*0/8	2π*0/8	2π*0/8	2π*0/8
1	2π*4/8	2π*5/8	2π*6/8	2π*7/8	2π*0/8	2π*1/8	2π*2/8	2π*3/8
2	2π*0/8	2π*2/8	2π*4/8	2π*6/8	2π*0/8	2π*2/8	2π*4/8	2π*6/8
3	2π*4/8	2π*7/8	2π*2/8	2π*5/8	2π*0/8	2π*3/8	2π*6/8	2π*1/8

ラジアン表示２

- この表の結果を計算してみましょう。

- エクセル等を使用すると簡単に求まりますね。

- エクセルでは、πの関数は　「= PI()」ですね。
- やはり中央位置から放射状になっていますね。
- 回転表の特徴です。

- ラジアンの最大値は、3.14×２　＝　6.29（切上げ）です。
- これを超えないようにしてください(笑)。

- 後は、この表からｘとｙの値を計算するだけです。

画像16

回転率をラジアン計算

No　数	4	5	6	7	0	1	2	3
4	0.000	3.142	0.000	3.142	0.000	3.142	0.000	3.142
5	3.142	0.785	4.712	2.356	0.000	3.927	1.571	5.498
6	0.000	4.712	3.142	1.571	0.000	4.712	3.142	1.571
7	3.142	2.356	1.571	0.785	0.000	5.498	4.712	3.927
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	3.142	3.927	4.712	5.498	0.000	0.785	1.571	2.356
2	0.000	1.571	3.142	4.712	0.000	1.571	3.142	4.712
3	3.142	5.498	1.571	3.927	0.000	2.356	4.712	0.785

ラジアン表示３

- まず、ｘの値を計算します。
- ｘは コサイン 「= cos（2*PI()*回転率）」 で計算します。

- 次は、ｙの値です。
- ｙは サイン 「= sin（2*PI()*回転率）」で計算します。

- このサインとコサインの値で表示した表は、
- 「回転係数表」＝「回転表」＝「係数表」
- と言います。

- ここでは、単に、「係数表」と言いましょう。

画像17

回転率をコサイン（ｘ）で表示 ＝ 「係数表ｘ」

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	1.000	△1.000	1.000	△1.000	1.000	△1.000	1.000	△1.000
5	△1.000	0.707	0.000	△0.707	1.000	△0.707	0.000	0.707
6	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000
7	△1.000	△0.707	0.000	0.707	1.000	0.707	0.000	△0.707
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	△1.000	△0.707	0.000	0.707	1.000	0.707	0.000	△0.707
2	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000
3	△1.000	0.707	0.000	△0.707	1.000	△0.707	0.000	0.707

画像18

回転率をサイン（ｙ）で表示　＝　「係数表ｙ」

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.000	0.707	△1.000	0.707	0.000	△0.707	1.000	△0.707
6	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000
7	0.000	0.707	1.000	0.707	0.000	△0.707	△1.000	△0.707
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.000	△0.707	△1.000	△0.707	0.000	0.707	1.000	0.707
2	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000
3	0.000	△0.707	1.000	△0.707	0.000	0.707	△1.000	0.707

度数よりラジアン１

- ここで、本題に戻ります。
- ラジアンによって、ｘとｙの値を求めました。
- これを度数で求めるとしたらどうでしょう。

- 横640画素×縦480画素（30万画素）の画像の場合
- ラジアンであれば、
- 横の計算で、2π＊ 0/640、 2π＊ 1/640、 2π＊ 2/640･･･。
- 縦の計算も、2π＊ 0/480、 2π＊ 1/480、 2π＊ 2/480･･･。
- と計算できます。

- 直径の長さを加味する必要が無いのです。
- ラジアンが「直径または半径と円周の比率」だからです。

度数よりラジアン２

- これを度数で求めるとしたらどうでしょう。

- 度数であれば、
- まず回転率に360度を掛けて、度数を出して・・・。
- 横の計算　 360 ＊ 0/640、 360 ＊ 1/640、 360 ＊ 2/640･･･。
- 縦の計算　 360 ＊ 0/480、 360 ＊ 1/480、 360 ＊ 2/480･･･。

- その次に、度数を三角関数表で長さに直してぇ・・・。
- それからぁ、え～とぉ･･･。

- う～ん、これって、結構、大変でしょう(笑)。

画像19

度数よりラジアン

sinとcos 1

- いよいよ、この章の最後になりました。
- sinとcosの相互関係を検討しておく必要があります。
- なぜか、それは秘密です。　・・・嘘です(笑)。

- フーリエ変換・逆変換で、登場します。
- ①、④、⑤ は、非常に重要です。
- 覚える必要はありませんが、理解してくださいね。
- ①　cos × sin　または　sin × cos
- ②　cos × cos
- ③　sin × sin
- ④　cos × cos ＋ sin × sin
- ⑤　cos × cos － sin × sin

sinとcos２

- ①は、cos × sin　または　sin × cos です。

- sin表とcos表の各項目を掛け算すると・・・。
- そうです、合計＝0.0 になります。

- 内訳には、0.0 以外のものもあります。
- ですが、合計は必ず、 0.0 になるのです。

- なぜこうなったのでしょうか。

- ｘもｙも、正の領域と負の領域が半分ずつだからです。
- 正と負の面積は、「プラスマイナス＝ゼロ」なのですね。

画像20

cos × sin または sin × cos

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.000	0.500	0.000	△0.500	0.000	0.500	0.000	△0.500
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	△0.500	0.000	0.500	0.000	△0.500	0.000	0.500
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.000	0.500	0.000	△0.500	0.000	0.500	0.000	△0.500
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	△0.500	0.000	0.500	0.000	△0.500	0.000	0.500
計	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

sinとcos３

- 次は、②の cos × cos です。

- さらにその次は、③の sin × sin です。

- 先ほどの係数表で、それぞれの値を掛け算してみましょう。
- 二乗するのですから、マイナスは無くなります。

- 円の８分割の場合、1.0、0.5、0.0 の３つになりましたね。

- すっきりして、綺麗ですね(笑)。

画像21

COS × COS

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500
6	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
7	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500
2	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
3	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500

画像22

sin × sin

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500
6	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
7	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500
2	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
3	0.000	0.500	1.000	0.500	0.000	0.500	1.000	0.500

sinとcos 4

- ④と⑤は、重要です。
- ④は、cos × cos ＋ sin × sin でした。
- 二つの表を足し算すれば良いですね。簡単でしょう(笑)。

- sinとcosを足し合わせると、すべて1.0になりますね。
- またその合計は、8.0と８倍されています。

- なぜこうなったのでしょうか。
- もうお分かりになられていると思います。
- 「ピタゴラスの定理」ですね。
- ｘとｙを二乗して足すと、半径の 1.0 になるのです。
- 1.0を８回足すのですから、８倍されますね(当然)。

画像23

cos × cos ＋ sin × sin

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
計	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000

sinとcos５

- 本章の最後のとり、⑤となりました。
- ⑤は、cos × cos − sin × sin でした。
- 二つの表を引き算すれば良いですね。

- 両者を差し引くと、左欄と中央欄だけが 1.0になります。
- この欄は、ｘ＝1.0、ｘ＝△1.0 の地点です。
- またその合計は、8.0と８倍されています。
- それ以外は、内訳的には値がありますが、合計はゼロです。

- ｘ軸上の点以外は、計算過程では、確かに値が存在します。
- しかし、計算結果としては、値が存在しないんです。
- 陰ながらｘ軸上の点を支える裏方さんなんですねぇ(笑)。

画像24

cos × cos − sin × sin

回数 No	4	5	6	7	0	1	2	3
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000
6	1.000	△1.000	1.000	△1.000	1.000	△1.000	1.000	△1.000
7	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000
2	1.000	△1.000	1.000	△1.000	1.000	△1.000	1.000	△1.000
3	1.000	0.000	△1.000	0.000	1.000	0.000	△1.000	0.000
計	8.000	0.000	0.000	0.000	8.000	0.000	0.000	0.000

まとめ_矩形

- 矩形（四角形）について、まとめてみましょう。

- ①　矩形運動の基準点は、通常、左上である。
- ②　表計算ソフトは、左上を基準に表を作成する。
- ③　データベースソフトも、左上を基準に表を作成する。
- ④　矩形運動は、通常、横に進み、その後、縦に進む。

まとめ_円

- 次は、円です。
- ①　円運動は、円の中心を基準にしてルール付けされる。
- ②　回転方向は、取り合えず、反時計回りと仮定する。
- ③　東西方向にｘ軸とし、東をプラスと仮定する。
- ④　南北方向にｙ軸とし、北をプラスと仮定する。
- ⑤　簡単化のために、円の半径＝１、直径＝２とする。
- ⑥　半円の円周距離をπと言う。
- ⑦　πの大きさは、直径を２としたとき、3.14 である。
- ⑧　円一回転のラジアンの大きさは、２πである。

まとめ_三角形

- 直角三角形について、まとめてみましょう。
- ①　三角形の３角の合計は180度である。
- ②　３辺の長さの比率には、法則性がある。
- ③　45度直角三角形は、１：１：√２である。
- ④　30度直角三角形は、１：２：√３である。
- ⑤　√は平方根で、二乗すればその値になるものを言う。
- ⑥　ピタゴラスの定理は、３辺の長さを計算する。
- ⑦　長辺に対するｙの長さを「sin（サイン）」と言う。
- ⑧　長辺に対するｘの長さを「cos（コサイン）」と言う。
- ⑨　画像のサインとコサインの計算には、ラジアンを使う。
- ⑩　ラジアンは、回転率に２πを乗じたものである。
- ⑪　画像の計算で角度を使用すると、結構、面倒である。

まとめ_sinとcos

- 最後に、三角関数のsinとcosをまとめてみましょう。

- ①　ｘは、「= cos（2*PI()*回転率）」　で計算する。
- ②　ｙは、「= sin（2*PI()*回転率）」　で計算する。

- ③　cos　×　sin　の合計　＝　0.0　となる。
- ④　sin　×　cos　の合計　＝　0.0　となる。
- （ｘもｙも、正の領域と負の領域が半分ずつであるため）

- ⑤　cos×cos＋sin×sin　の合計　＝　1.0×分割数　となる。
- （「ピタゴラスの定理」により半径＝1.0となるため）
- ⑥　ｙ軸上の点の計算結果は、ゼロになる。