ピクトの独り言

フーリエ変換の話し_その5

株式会社 アイネット

フーリエ逆変換

- ではいよいよ、最終章「フーリエ逆変換」です。
- 箱根駅伝の復路コースに出走しましょう(スタート)。

- 逆変換、いわゆる元に戻すことです。
- どこを逆にすれば良いか、もうお分かりかもしれません。
- 回転方向を逆の回転にすれば良いのですね。

- 往路の回転方向は、どちらだったのでしょうか。
- 暗黙的に、「時計回りを前提」に話しを進めてきました。

- えっ、本当に？　と思われるかもしれませんね。
- 実は、そうなんです(笑)。

時の流れ１

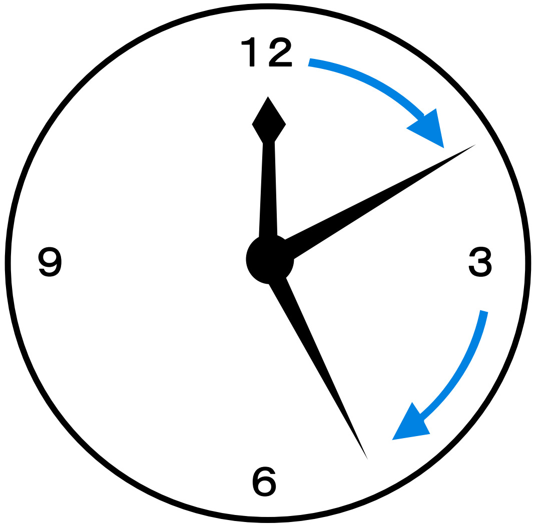
- 円の回転方向は、「反時計回りを正」と仮定しました。
- 「正の回転方向＝反時計回り」は、次のとおりでした。

	（始点）								（終点）
① 正の方向	東端	⇒	北端	⇒	西端	⇒	南端	⇒	東端
② コサイン	1.0		0.0		△1.0		0.0		1.0
③ サイン	0.0		1.0		0.0		△1.0		0.0

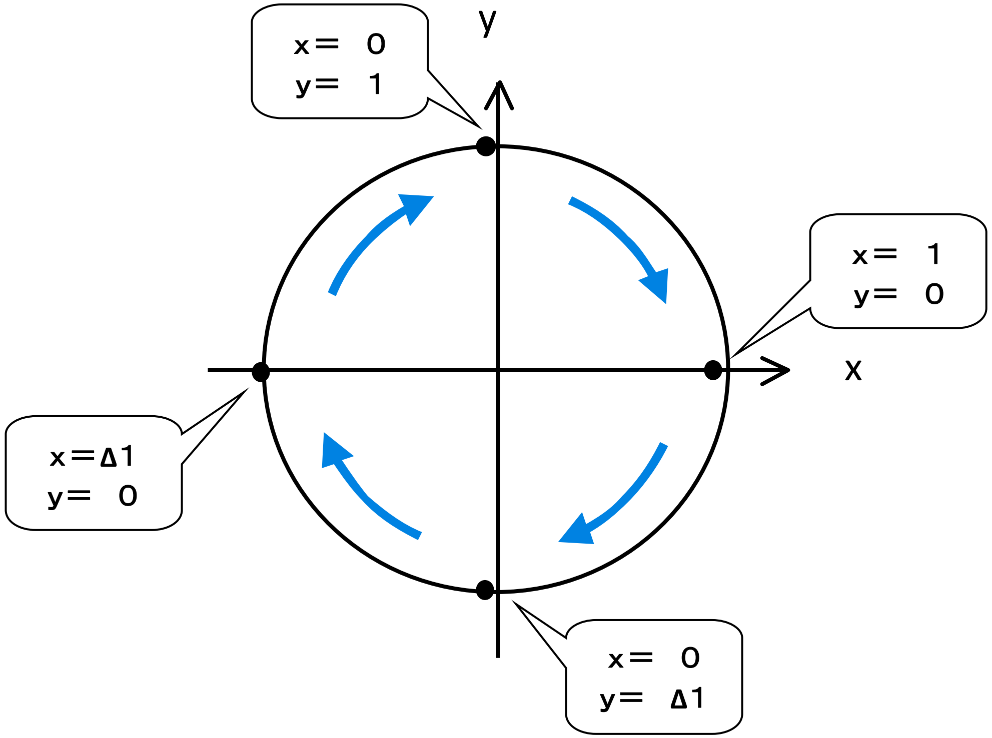
- 往路では、「サインを正負反対」にしました。
- サインを「正負反対＝負の回転方向」にする。
- 「始点⇒終点」の向きが、「終点⇒始点」の向きになる。
- すなわち「時計回り」になるのです。
- ちなみに、「コサインの回転は正負いずれも同じ」です。

画像１

時計の回り



円の時計回り



時の流れ２

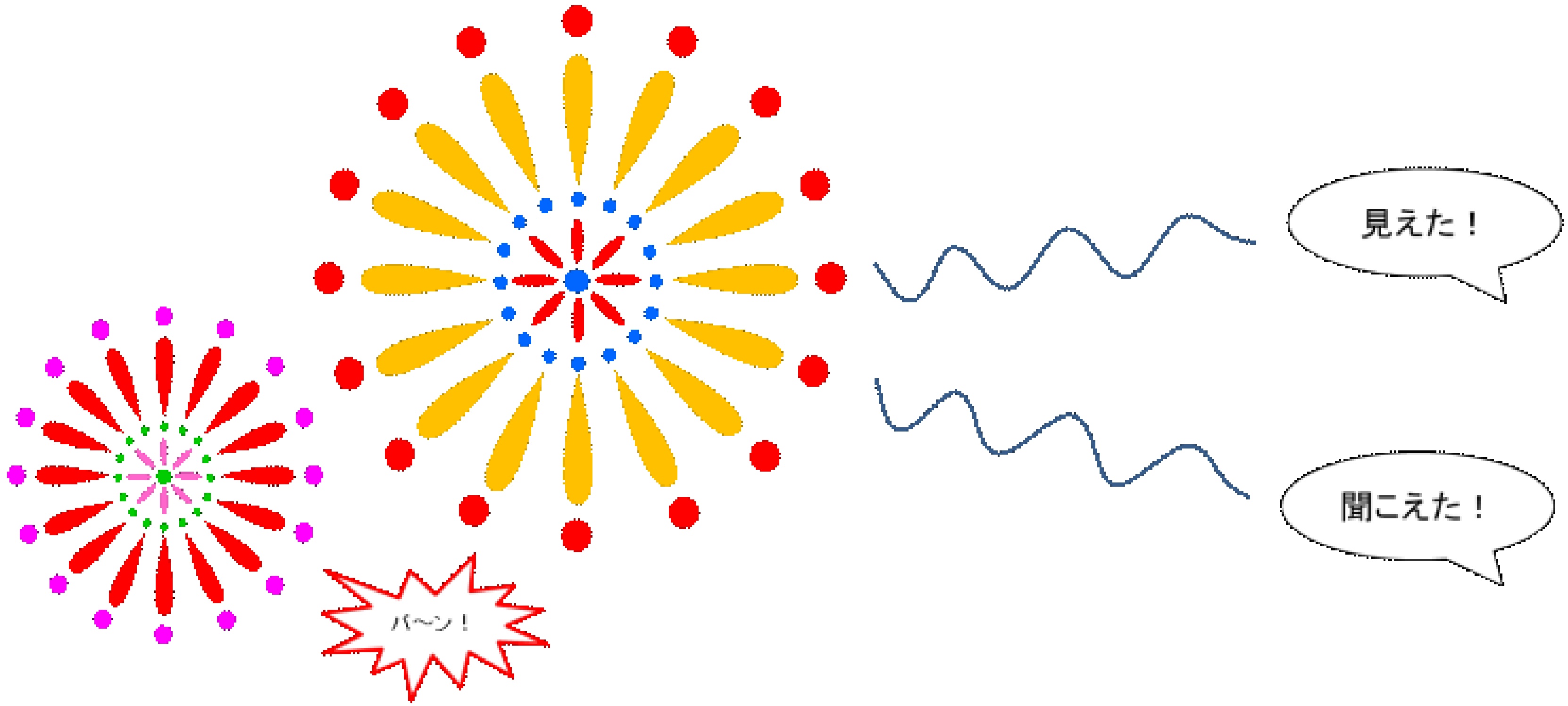
- 昭和の名曲に「時の流れに身を任せ」があります。
- フーリエ変換も、この唄と同調しています。
- それは、フーリエ変換の利用目的にあります。

- フーリエ変換は、本来、音波や電波等の波を取り扱います。
- 音波や電波は、時間に比例して伝達されます。
- 現実の世界は、「★★時は金なり★★」なんですね(笑)。

- 画像の世界は、すでに画像が完成した後の段階です。
- そのため、時計回りにする必要もありませんでした。
- でも、説明し易かったので、時計回りとしただけです。
- ただ、それだけです(笑)。

画像２

音や光＝ ｆ(時間) ・・・ 音や光は時間の関数



逆回転１

- 前章のフーリエ変換データを元に逆変換を行いましょう。
- 今度は、反時計回りに回転いわゆる「逆回転」させます。
- 対して、時計回りのことを「順回転」と言いましょうね。

- まず、データとしては、二つの色値が・・・。
- えっ、「色値が二つ」もありますね(驚愕)。
- この色値は、「フーリエ変換で計算したｘとｙ」ですね。
- コサイン計算のｘ色値とサイン計算のｙ色値です。

- 往路では、色値が一つしかありませんでした。
- う～ん、困った困った(苦悩)。
- これって、いったいどうやって計算するのでしょうか。

画像３

コサインで計算した x の色値

色No	4　5　6　7　0　1　2　3		cos
色値	ステップ１	ステップ２	1,320
4	↓ コサインで計算した色値 ↓	→ xの色値を横に集計 →	△40.0
5	↓ ↓	→ →	100.0
6	↓ ↓	→ →	△40.0
7	↓ ↓	→ →	100.0
0	↓ ↓	→ →	1,320.0
1	↓ ↓	→ →	100.0
2	↓ ↓	→ →	△40.0
3	↓ ↓	→ →	100.0
合計	1600.0	1600.0	1,600.0

サインで計算した y の色値

色No	4　5　6　7　0　1　2　3		sin
色値	ステップ１	ステップ２	1,320
4	↓ サインで計算した色値 ↓	→ yの色値を横に集計 →	0.0
5	↓ ↓	→ →	41.4
6	↓ ↓	→ →	△40.0
7	↓ ↓	→ →	241.4
0	↓ ↓	→ →	0.0
1	↓ ↓	→ →	△241.4
2	↓ ↓	→ →	40.0
3	↓ ↓	→ →	△41.4
合計	0.0	0.0	0.0

逆回転２

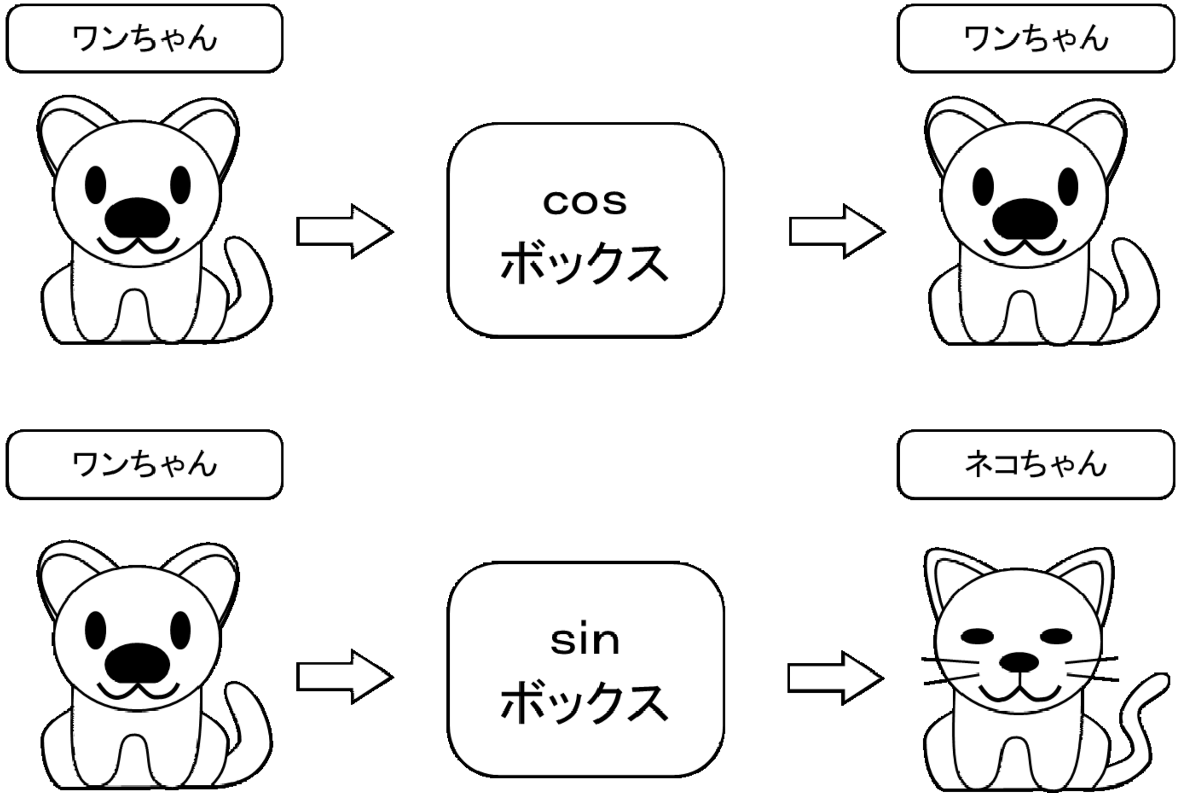
- 往路は１つで、なぜ復路は、色値が２つなのでしょう。
- 実は、往路でも色値が２つあったのです。
- 嘘だぁ・・・。と仰られる方も居られるでしょうね(笑)。

- 往路のスタート地点は、ｘ軸東方向でした。
- ここでは、ｘ＝1.０、ｙ＝0.０ でしたね。
- 0.０ の掛け算はゼロですので、ｙの色値はゼロなのです。
- ゼロですから、ｙの計算を省略したわけです。

- 省略したとは言え、次の重要なことが判明しました。
- 　① ｘの色値 ＊ cos ⇒ 計算したｘ ⇒ ｘ･･･「本人」
- 　② ｘの色値 ＊ sin ⇒ 計算したｙ ⇒ ｙ･･･「相手」

画像４

フーリエ変換のビフォーアフター（自分と相手）



順回転１

- 逆回転を行う前に、もう少し順回転を検討しましょう。

- 1/8（315度）から 3/8（225度）に移動したと考えます。
- 計算の開始位置＝ 1/8、到達位置＝ 3/8 ですね。
- 1/8 から 3/8 まで、 2/8 だけ順回転したと考えるのです。

- 1/8 も 3/8 も、ｘとｙの値は分かっていますね。
- 分からないのは、たった一つ。
- 「1/8 のｘとｙから、 3/8 のｘとｙの値への変化」です。

- 1/8 のｘとｙの値に、sinとcosを乗じたら良さそうです。
- 変化した距離は 2/8だから、2/8 の sinとcos でしょうね。

順回転２

- 色値 210 を１間隔で順回転したときの ｘとｙ の値
- （1/8 における）　ｘの色値＝　148.5，ｙの色値＝△148.5
- （3/8 における）　ｘの色値＝△148.5，ｙの色値＝△148.5

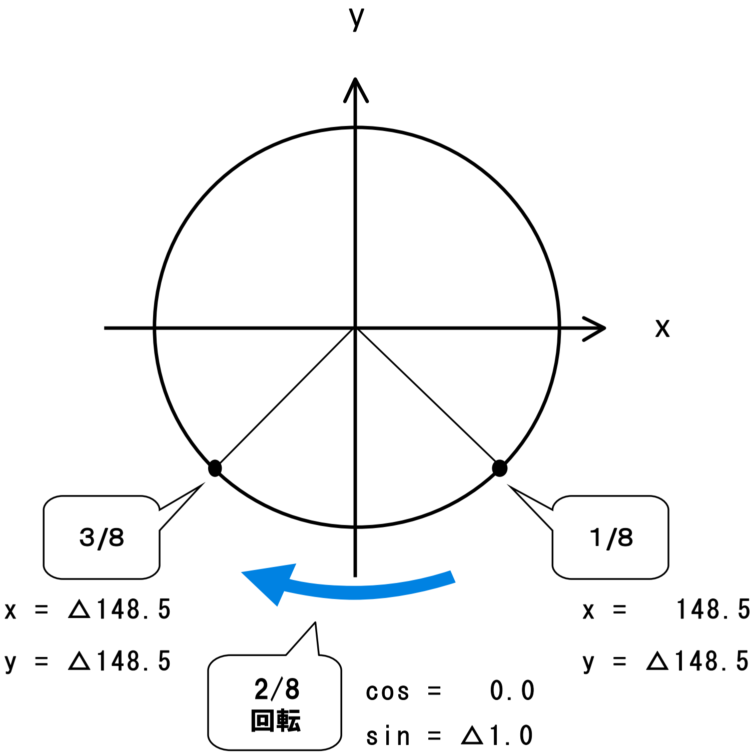
- 2/8 だけ時計回りに順回転したときの cos と sin の値
- （2/8 回転した場合）　cos ＝ 0.0，sin ＝ △1.0

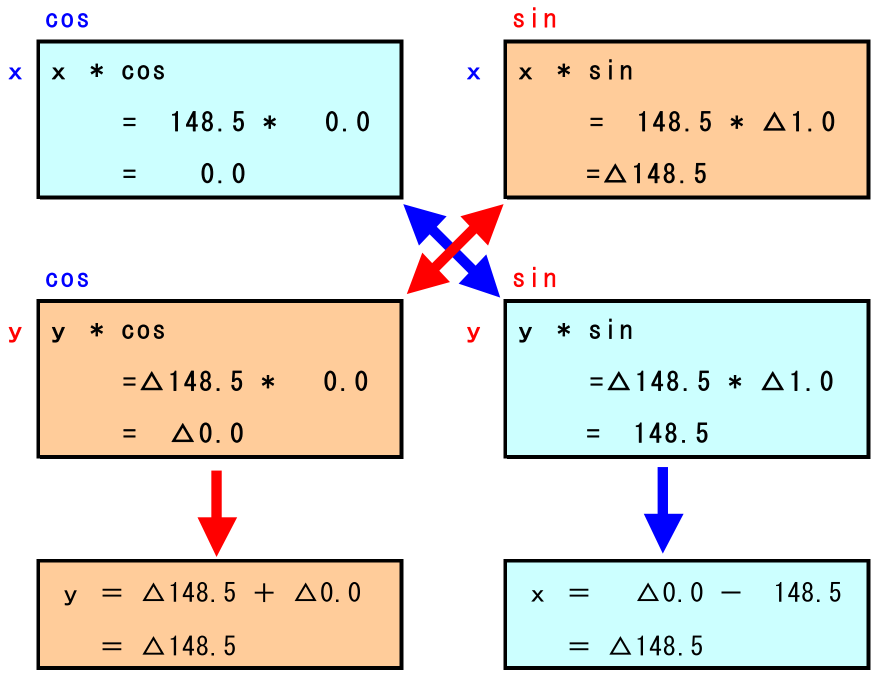
- これを計算した結果
- ①ｘの色値 ＊ cos＝　0.0，②ｘの色値 ＊ sin＝△148.5
- ③ｙの色値 ＊ cos＝ △0.0，④ｙの色値 ＊ sin＝　148.5

- どうも、①ー④、②＋③ と言う結び付きがありそうです。

画像５

開始（1/8）～ 到達（3/8） ＝ 2/8だけ順回転





順回転３

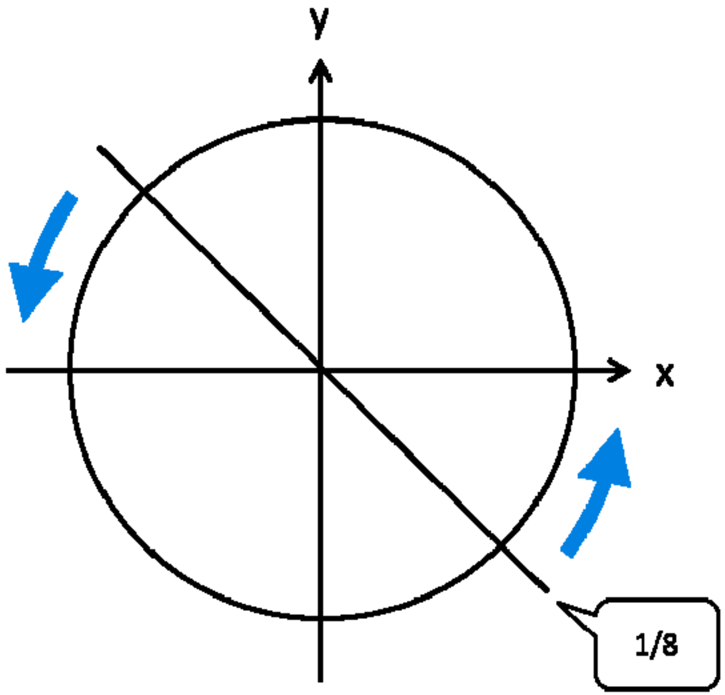
- 駄目押し的に、今のが正しいかを確認しましょう(笑)。

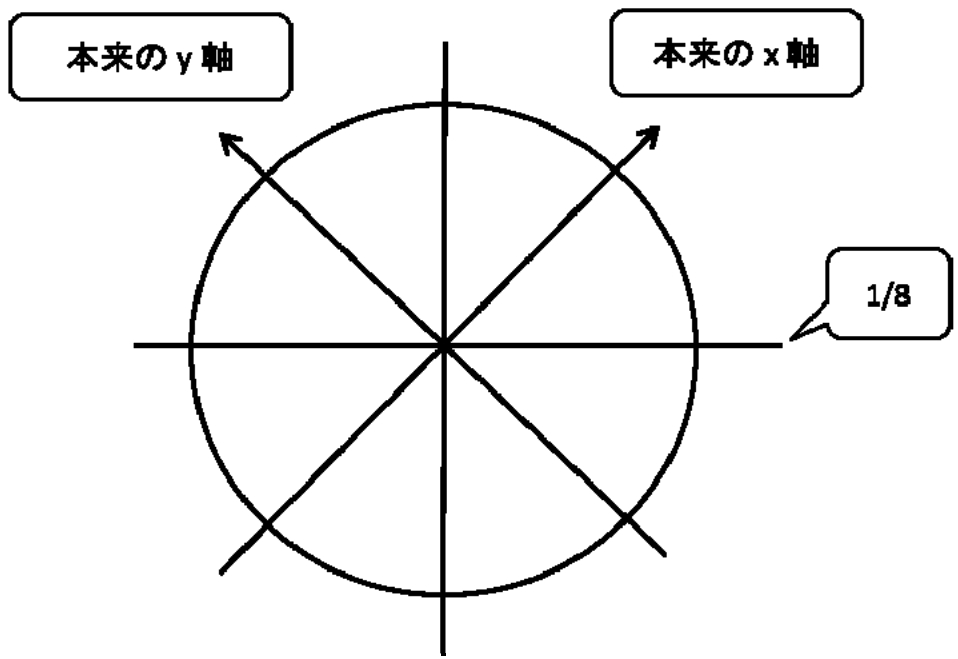
- 時計回りに1/8回転した時点のｘとｙは、判明しています。
- 図形上、これを反時計回りに、傾きを1/8だけズラします。
- そうすると、1/8回転軸が新しい基準軸になりますね。

- 問題はｙの値です。
- ｙもｘと同じように考えればよいでしょう。
- ｙを「ｘと仮定」して、ｘと同様に計算しましょう。
- そして、ｘの計算で、自分の値と相手の値を計算します。
- そうすると、やはり・・・。
- 「①－④、②＋③」と言う関係が分かりますね。

画像６

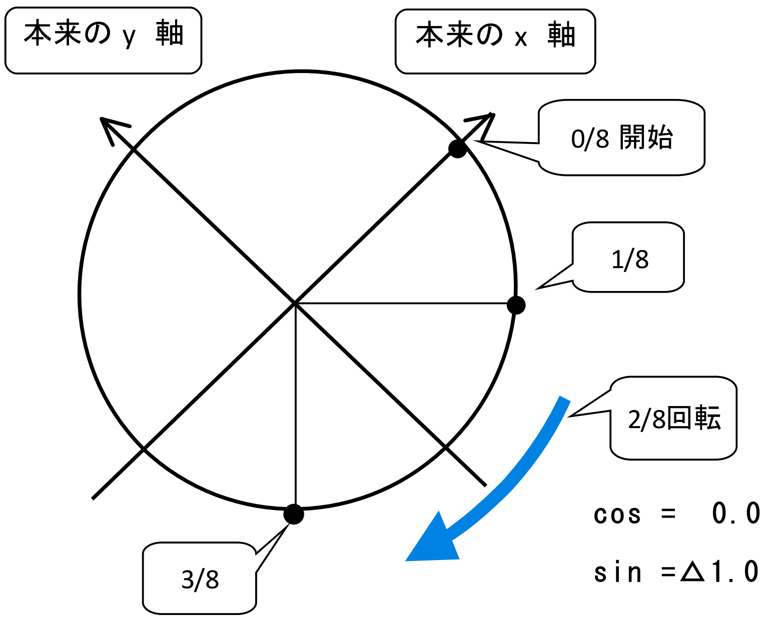
基準軸の回転（45度反時計回りに回転）





画像７

回転後の基準軸から 2/8だけ順回転



cos

x

x ＊ cos
= 148.5 ＊ 0.0
= 0.0

sin

x

x ＊ sin
= 148.5 ＊ △1.0
=△148.5

cos

y

y ＊ cos
=△148.5 ＊ 0.0
= △0.0

sin

y

y ＊ sin
=△148.5 ＊ △1.0
= 148.5

x ＝ 0.0 － 148.5 ＝ △148.5
y ＝ △148.5 ＋ △0.0 ＝ △148.5

加法定理１

- この結果、次の計算式が成立しそうです。
- ①　ｘ ＊ cos － ｙ ＊ sin
- ②　ｙ ＊ cos ＋ ｘ ＊ sin

- ここで、ｘ＝cos、ｙ＝sin なので、次式に変形できます。
- ①　cos ＊ cos － sin ＊ sin
- ②　sin ＊ cos ＋ cos ＊ sin

- これは、三角関数の重要な公式です。
- お分かりになりますか(笑)。

- そぉ、「加法（かほう）定理」と言われるものです。

加法定理２

- 加法定理は、円周上の回転計算で必ず用いられます。

- 円周上の「ある点から他の点に移動」したとします。
- このときに、ｘとｙの値を求める公式が加法定理です。

- 通常は、ｙを先に求めます。
- 　① 回転後のｙ ＝ sin ＊ cos ＋ cos ＊ sin
- 　② 回転後のｘ ＝ cos ＊ cos － sin ＊ sin

- 高校数学で登場する公式で、優れた証明法があります。
- また、「コスモス・・・」と言う暗記方法も色々あります。
- 数学的証明法は、適当に勉強してくださいね(笑)。

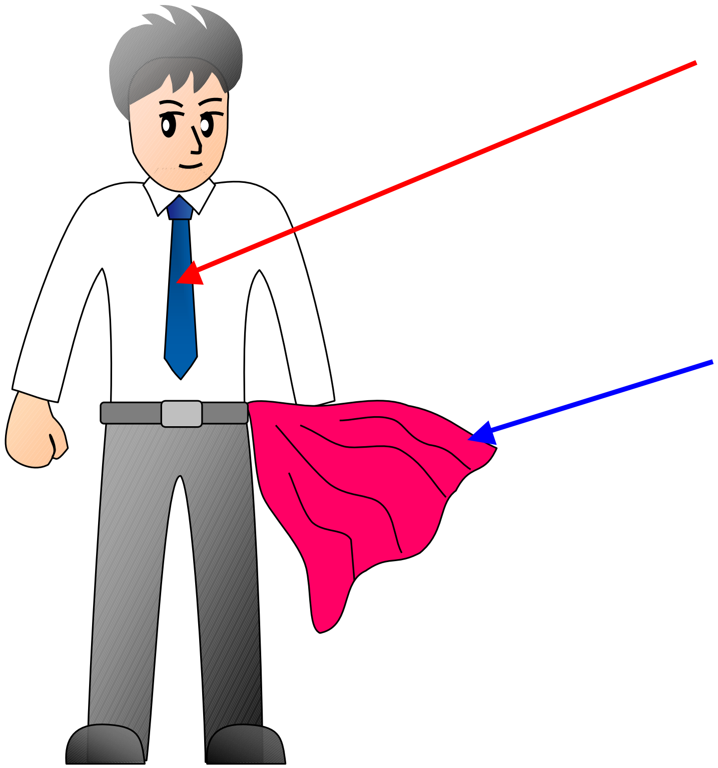
加法定理３

- 話しのネタとして、ピクト式暗記法をお一つ如何ぁ(笑)。
- ｙを先にｘを後にして、公式を考えます。
- ①　sin ＊ cos ＋ cos ＊ sin
- (sin(α＋β) ＝ sinαcosβ＋cosαsinβ)
- ②　cos ＊ cos － sin ＊ sin
- (cos(α＋β) ＝ cosαcosβ－sinαsinβ)

- 暗記法は・・・。
- ずばり、「★★スカートを腰に括った紳士さん★★ 」です。
- こんな人は、多分「馬鹿で阿呆」な人ですよねぇ。
- あ、だから「鹿呆（かほう）定理」かぁ・・・(笑)。
- ・・・お後がよろしいようでぇ(テケテン)。

画像８

ピクト式暗記法_加法（鹿呆）定理１



ネクタイを締めている。

⇒ 多分、彼は紳士でしょう。

＋

スカートを腰に括っている。

⇒ 多分、彼は〇〇でしょう。

＝

結論として・・・。

⇒ 彼は馬鹿で阿呆でしょう（笑）。

画像９

ピクト式暗記法_加法（鹿呆）定理２

「スカー、 トを、 こし、 に、くく、 った、 しんし、 さん」			
スカー	su　ca	s　c	sin × cos
トを	とお	＋	＋（足す）
こし	co　si	c　s	cos × sin
に	2	２行目に改行	
くく	coo coo	c　c	cos × cos
った	対（つい）＋（たす）	プラスの反対・プラスのペアー	ー（引く）
しんし	sin si	s　s	sin × sin
さん	3	３行目に改行	

逆変換実行

- 本題に戻って、加法定理を使って逆変換を行いましょう。

- ①　フーリエ計算したｘとｙを計算基礎とする。
- ②　sinの符号をプラスにする（反時計回り＝逆回転）。
- （順変換では、この符号が正負反対）
- ③　計算したｘの色値を元に、cosとsinを計算する。
- ｘ＝ｘ ＊ cos　　ｙ＝ｘ ＊ sin
- ④　計算したｙの色値を元に、 sinとcosを計算する。
- ｘ＝ｙ ＊ sin　　ｙ＝ｙ ＊ cos
- ⑤　加法定理を使って、③と④を結び付ける。
- ｘ＝ cos（ｘ） ＊ cos － sin（ｙ） ＊ sin
- ｙ＝ sin（ｙ） ＊ cos ＋ cos（ｘ） ＊ sin

画像10

フーリエ逆変換
（加法定理による計算）

色No	x	x	y	y	x	y	x−y	x	y	x+y
色値	cos	sin	cos	sin	cos	sin	Σ	sin	cos	Σ
4	800.0	△0.0	0.0	0.0	800.0	0.0	800.0	△0.0	0.0	△0.0
5	1,360.0	0.0	0.0	479.9	1,360.0	479.9	880.1	0.0	0.0	0.0
6	1,360.0	0.0	0.0	400.0	1,360.0	400.0	960.0	0.0	0.0	0.0
7	1,360.0	0.0	0.0	319.9	1,360.0	319.9	1,040.1	0.0	0.0	0.0
0	1,600.0	0.0	0.0	0.0	1,600.0	0.0	1,600.0	0.0	0.0	0.0
1	1,360.0	0.0	△0.0	△319.9	1,360.0	△319.9	1,679.9	0.0	△0.0	△0.0
2	1,360.0	0.0	△0.0	△400.0	1,360.0	△400.0	1,760.0	0.0	△0.0	△0.0
3	1,360.0	0.0	△0.0	△479.9	1,360.0	△479.9	1,839.9	0.0	△0.0	△0.0
合計	10,560.0	△0.0	0.0	0.0	10,560.0	0.0	10,560.0	△0.0	0.0	△0.0

画像11

フーリエ逆変換
（cos ＊ cos の計算）

色No	4	5	6	7	0	1	2	3	合計
色値	△ 40	100	△ 40	100	1,320	100	△ 40	100	1,600
4	△40.0	△100.0	△40.0	△100.0	1,320.0	△100.0	△40.0	△100.0	800.0
5	40.0	70.7	0.0	△70.7	1,320.0	△70.7	△0.0	70.7	1,360.0
6	△40.0	△0.0	40.0	0.0	1,320.0	△0.0	40.0	0.0	1,360.0
7	40.0	△70.7	△0.0	70.7	1,320.0	70.7	0.0	△70.7	1,360.0
0	△40.0	100.0	△40.0	100.0	1,320.0	100.0	△40.0	100.0	1,600.0
1	40.0	△70.7	0.0	70.7	1,320.0	70.7	△0.0	△70.7	1,360.0
2	△40.0	0.0	40.0	△0.0	1,320.0	0.0	40.0	△0.0	1,360.0
3	40.0	70.7	△0.0	△70.7	1,320.0	△70.7	0.0	70.7	1,360.0
合計	0.0	0.0	0.0	0.0	10,560.0	0.0	0.0	0.0	10,560.0

画像12

フーリエ逆変換
（cos ＊ sin の計算）

色No	4	5	6	7	0	1	2	3	合計
色値	△ 40	100	△ 40	100	1,320	100	△ 40	100	1,600
4	0.0	△0.0	0.0	△0.0	0.0	△0.0	0.0	△0.0	△0.0
5	0.0	△70.7	△40.0	△70.7	0.0	70.7	40.0	70.7	0.0
6	0.0	100.0	0.0	△100.0	0.0	100.0	0.0	△100.0	0.0
7	0.0	△70.7	40.0	△70.7	0.0	70.7	△40.0	70.7	0.0
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0	70.7	△40.0	70.7	0.0	△70.7	40.0	△70.7	0.0
2	0.0	△100.0	0.0	100.0	0.0	△100.0	0.0	100.0	0.0
3	0.0	70.7	40.0	70.7	0.0	△70.7	△40.0	△70.7	0.0
合計	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	△0.0

画像13

フーリエ逆変換
（sin ＊ cos の計算）

色No	4	5	6	7	0	1	2	3	合計
色値	0	41	△ 40	241	0	△ 241	40	△ 41	0
4	0.0	△41.4	△40.0	△241.4	0.0	241.4	40.0	41.4	0.0
5	0.0	29.3	0.0	△170.7	0.0	170.7	0.0	△29.3	0.0
6	0.0	△0.0	40.0	0.0	0.0	0.0	△40.0	△0.0	0.0
7	0.0	△29.3	△0.0	170.7	0.0	△170.7	△0.0	29.3	0.0
0	0.0	41.4	△40.0	241.4	0.0	△241.4	40.0	△41.4	0.0
1	0.0	△29.3	0.0	170.7	0.0	△170.7	0.0	29.3	△0.0
2	0.0	0.0	40.0	△0.0	0.0	△0.0	△40.0	0.0	△0.0
3	0.0	29.3	△0.0	△170.7	0.0	170.7	△0.0	△29.3	△0.0
合計	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	△0.0	0.0	0.0

画像14

フーリエ逆変換
（sin ＊ sin の計算）

色No	4	5	6	7	0	1	2	3	合計
色値	0	41	△ 40	241	0	△ 241	40	△ 41	0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	△0.0	0.0	△0.0	0.0
5	0.0	29.3	40.0	170.7	0.0	170.7	40.0	29.3	479.9
6	0.0	△41.4	△0.0	241.4	0.0	241.4	0.0	△41.4	400.0
7	0.0	29.3	△40.0	170.7	0.0	170.7	△40.0	29.3	319.9
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0	△29.3	40.0	△170.7	0.0	△170.7	40.0	△29.3	△319.9
2	0.0	41.4	△0.0	△241.4	0.0	△241.4	0.0	41.4	△400.0
3	0.0	△29.3	△40.0	△170.7	0.0	△170.7	△40.0	△29.3	△479.9
合計	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

重複計算

- ありゃ、この表、少し変ですね。
- やたらに値が大きいですね(笑)。

- その理由は、cos ＊ cos表の０列目に明示されています。
- 色値の合計である 1320 が８回合計されています。
- それ以外の列は、すべてゼロです。
- １回で済む合計計算を、８回も重複計算しているのです。
- そのため、画素数の８で除してあげる必要があります。

- これについては、「３章_２」で検討しましたよぉ(笑)。
- 「cos ＊ cos＋sin ＊ sin」（ピタゴラスの定理）でした。
- 忘れた方は、確認してくださいね(復習)。

画像15

画素数で除して再計算

色No	x	x	y	y	x	y	x−y		x	y	x+y	
色値	cos	sin	cos	sin	cos	sin	Σ	÷数	sin	cos	Σ	÷数
4	800	△0	0	0	800	0	800	100	△0	0	△0	△0
5	1,360	0	0	480	1,360	480	880	110	0	0	0	0
6	1,360	0	0	400	1,360	400	960	120	0	0	0	0
7	1,360	0	0	320	1,360	320	1,040	130	0	0	0	0
0	1,600	0	0	0	1,600	0	1,600	200	0	0	0	0
1	1,360	0	△0	△320	1,360	△320	1,680	210	0	△0	△0	△0
2	1,360	0	△0	△400	1,360	△400	1,760	220	0	△0	△0	△0
3	1,360	0	△0	△480	1,360	△480	1,840	230	0	△0	△0	△0
合計	10,560	△0	0	0	10,560	0	10,560	1,320	△0	0	△0	△0

Sin ＊ Cos

- それと、もう一つ。
- 次の二つの表の合計色値は、ゼロになっています。
- 　①　フーリエ計算したｘの値にsinを乗じた表
- 　②　フーリエ計算したｙの値にcosを乗じた表

- ①のｘは、順変換で、「色値 ＊ cos」を計算した結果です。
- これに、今度の逆変換で、sinを乗じています。
- 結果として、「色値 ＊『cos ＊ sin』」となっています。
- もうお分かりですね、すでに「３章_２」で確認済みです。
- ｘとｙの正と負の面積は同じなので、ゼロになるのです。

- ②についても、同じように考えられます。

実数と虚数

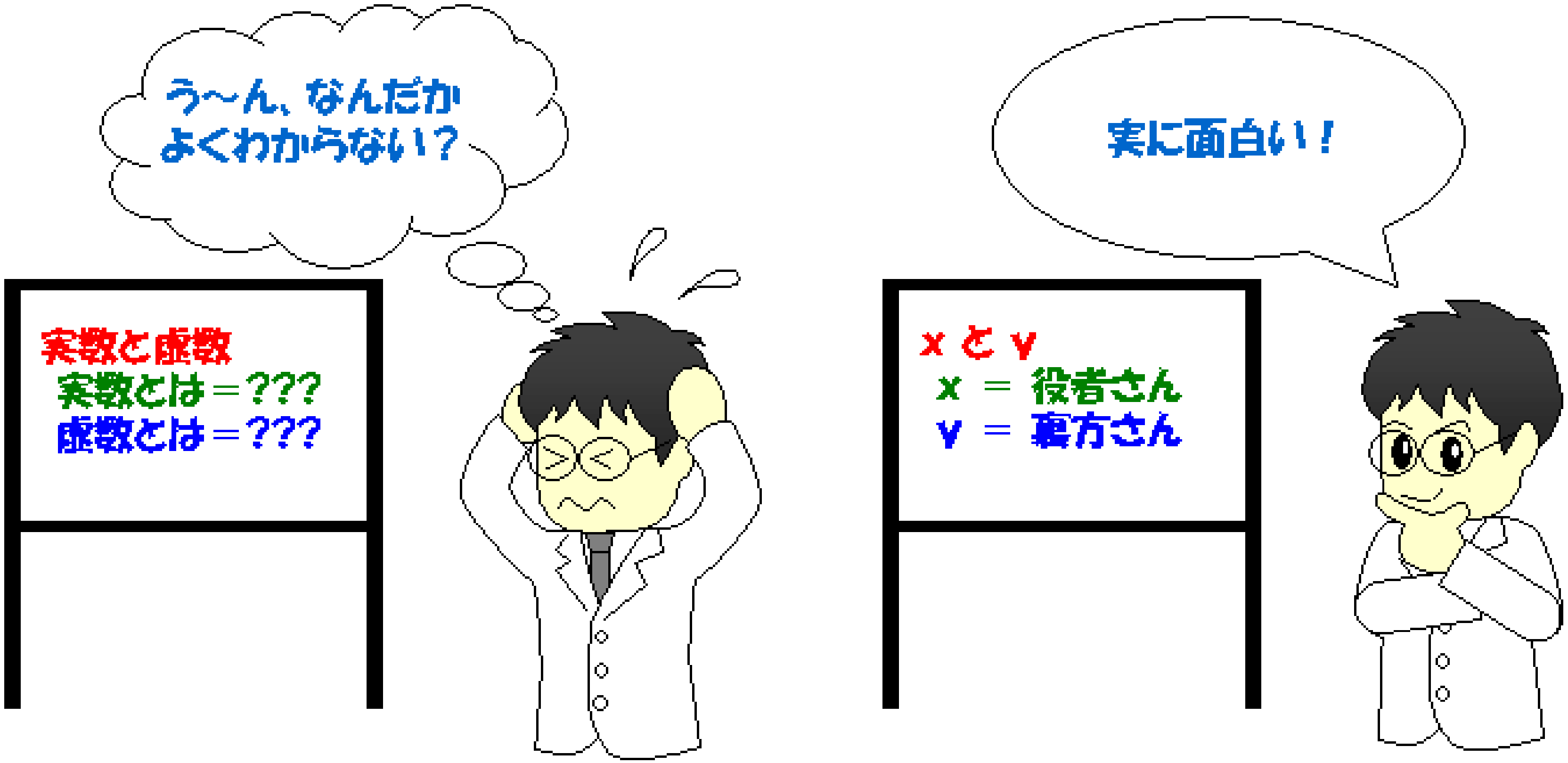
- さらに、もう一つ。
- フーリエ逆変換したｙの色値は、ゼロになっています。
- ｙの値はスタート時点でもゼロだから、当然ですよね。
- 開始時点と終了時点はゼロ、途中だけ数値が発生する。
- なぜそうなのか、それは「ｙが虚数」だからです。

- 「３章_２」で、「ｙは裏方さん」と表現しました。
- これは、「ｙは虚数」と言うことを表しています。
- であれば、ｙではない「ｘは実数」と言うことになります。

- 「実数と虚数」、これまで意識しないで進めてきました。
- 意識しないでも、フーリエは理解できるんですよぉ(笑)。

画像16

実数と虚数の捉え方



前半のまとめ

- それでは、復路のまとめをしてみましょう。
- ①　フーリエも、「時の流れに身を任せた処理」を行う。
- 　　順回転　・・・　時計回り
- 　　逆回転　・・・　反時計回り
- ②　画像フーリエの場合には、①が反対でも良い。
- ③　色値には、ｘの色値とｙの色値の２つがある。
- ③　フーリエ変換には、「加法定理」を使って計算する。
- ④　逆変換では、色値が分割数倍だけ重複計算されている。
- ⑤　次の二つの表の合計色値は、ゼロになる。
- 　　フーリエ計算したｘの値にsinを乗じた表
- 　　フーリエ計算したｙの値にcosを乗じた表
- ⑥　フーリエで登場する「ｙは虚数」と言われる。

コーヒータイム

- 以上で、逆変換も終了しました。

- フーリエ変換の一巡が終了したわけです。
- やっと元の世界に戻ることができました。
- 結構な長旅でしたね(笑)。
- 箱根峠を越えた後は難しくは無かったでしょう(笑)。

- では、この当たりで、コーヒータイムにしたいと思います。

- 後半は、フーリエを利用した画像補正をやってみましょう。
- 「周波数領域での補正→逆変換」を行います。
- 眠たいでしょうけど、もう少しですよぉ(笑)。